新高２生用

入会試験参考資料

4月入会用

数学

英語多読

はじめに

４月からの受講をご検討いただき、ありがとうございます。
この冊子は、新規入会試験・クラス分け試験を受験される際の試験問題の参考として、また、予備知識の確認やコース選択の判断材料としてご利用ください。

※掲載している問題は、過去の試験問題やテキストの内容から抜粋したサンプル問題となっていますことをご了承のうえ、ご利用ください。

目次

数学 S コース新規入会試験　サンプル問題

以下は、新規入会試験問題の出題傾向を知っていただくためのサンプル問題です。実際の試験問題とは、内容・量ともに異なります。

1

次の問題の解答の数値・式のみを解答欄に記入せよ。

（１） ２次不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ を解け。

（２） $-3 \leqq x \leqq 3$ のとき、関数 $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$ の値域を求めよ。

（３） 三角形 ABC で、BC＝7，CA＝5，AB＝3 のとき、∠BAC は何度か。

（４） $0° \leqq \theta < 360°$ として、不等式 $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ を解け。

（５） $\sin 105°$ を求めよ。

（６） a,a,a,b,b,b,b の 7 文字を 1 列に並べる順列の総数を求めよ。ただし、アルファベットどうしは区別しない。

（７） 赤球 5 個と白球 5 個が入った袋から、同時に 3 球を取り出すとき、3 個とも赤球である確率 p を求めよ。

（８） 原点 O と円板 $D: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \leqq 0$ との最短距離 d を求めよ。

（９） 多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + k$ が $(x-1)$ で割り切れるように k の値を定め、$f(x)$ を有理数係数の範囲で因数分解せよ。

2

放物線 $C: y = x^2$ と直線 $l_k: y = x + k$ （k は実数の定数）を考える。

（解答の過程も記すこと）

（１） C と l_k が相異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。

（２） k が（１）の範囲を動くとき、C と l_k の 2 交点を P , Q とする。このとき、線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。

【解答】

$\boxed{1}$

（1） $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ が正となる x の範囲を考えて、$\boxed{x<-1 \text{ または } 2<x}$

（2）放物線 $y=f(x)=(x-1)^2+1$ の軸： $x=1$ が定義域 $-3 \leqq x \leqq 3$ 内の中央より右にあることから、求める値域は、 $f(1) \leqq y \leqq f(-3)$　すなわち、$\boxed{1 \leqq y \leqq 17}$

（3）余弦定理より、$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \angle\mathrm{BAC}=\boxed{120^\circ}$

（4）単位円 $x^2+y^2=1$ の $y \leqq \dfrac{1}{2}$ なる部分に対応する θ の範囲を考えて、$\boxed{0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ \text{ または } 150^\circ \leqq \theta < 360^\circ}$

（5）加法定理より、$\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\cos60^\circ\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

（6）1 列に並んだ 7 部屋のうち 3 部屋に a を入れると考えて、${}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=\boxed{35}$通り

（7）起こりうるすべての場合は ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り（各々等確率）で、このうち、3 個とも赤球であるのは ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りなので、

$$p=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{120}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

（8） $x^2+y^2-8x-6y+21 \leqq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2 \leqq 2^2$ より、円板 D の中心は $\mathrm{C}(4,3)$ 、半径は 2 であるから、

$d=\mathrm{OC}-2=\sqrt{4^2+3^2}-2=\boxed{3}$

（9） $f(x)$ を $(x-1)$ で割り算すると、商が x^2+3x+6 、余りが $k+6$ となるので、 $k=\boxed{-6}$のとき割り切れ、このとき、 $f(x)=\boxed{(x-1)(x^2+3x+6)}$と因数分解される。

$\boxed{2}$

（1） $y=x^2$ と $y=x+k$ を連立して得られる x の 2 次方程式： $x^2-x-k=0$　…①

が相異 2 実解を持つ条件を考えて、判別式：$1+4k>0 \Leftrightarrow \boxed{k>-\dfrac{1}{4}}$　…②

（2）②のとき、①の相異 2 実解を α,β とすると、$\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2)$， $\mathrm{Q}(\beta,\beta^2)$， $\alpha+\beta=1$， $\alpha\beta=-k$ （$\because$ 解と係数の関係）であるから、R の x 座標、 y 座標はそれぞれ、

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2},\quad y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{1+2k}{2}=\frac{1}{2}+k$$

ここで、②より、 y のとりうる範囲は、 $y>\dfrac{1}{4}$ なので、求める軌跡は、$\boxed{\text{直線 } x=\dfrac{1}{2} \text{ の } y>\dfrac{1}{4} \text{ なる部分}}$

数学 EFG／M コース新規入会試験　サンプル問題

以下は、新規入会試験問題の出題傾向を知っていただくためのサンプル問題です。実際の試験問題とは、内容・量ともに異なります。

1

次の問題の解答の数値・式のみを解答欄に記入せよ。

（１）2 次不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ を解け。

（２）$0° \leqq \theta < 360°$ として、不等式 $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ を解け。

（３）$\sin 105°$ を求めよ。

（４）原点 O と円板 $D: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \leqq 0$ との最短距離 d を求めよ。

（５）和 $S = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ を求めよ。ただし、n は 0 以上の整数とする。

（６）$a = \log_{10} 2$，$b = \log_{10} 3$ とするとき、$\log_{10} \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ を a, b で表せ。

2

xyz 空間で、2 点 A(1,1,1)，B(2,3,4) を通る直線を l とする。点 C(7,7,9) から l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。　（解答の過程も記すこと）

3

関数 $y = f(x) = x^3 - x$ のグラフを C とし、C 上の点 $(1,0)$ における C の接線を l とする。（解答の過程も記すこと）

（１）l の式を求めよ。

（２）C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】

1

（1） $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ が正となる x の範囲を考えて、$\boxed{x<-1 \text{ または } 2<x}$

（2）単位円 $x^2+y^2=1$ の $y \leqq \dfrac{1}{2}$ なる部分に対応する θ の範囲を考えて、$\boxed{0° \leqq \theta \leqq 30° \text{ または } 150° \leqq \theta < 360°}$

（3）加法定理より、$\sin 105° = \sin(60°+45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

（4） $x^2+y^2-8x-6y+21 \leqq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2 \leqq 2^2$ より、円板 D の中心は $\mathrm{C}(4,3)$ 、半径は 2 であるから、

$d=\mathrm{OC}-2=\sqrt{4^2+3^2}-2=\boxed{3}$

（5）

$$\begin{array}{rl} S =& 1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n \\ -)\ 2S =& \phantom{1+{}}2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n+2^{n+1} \\ \hline -S =& 1-2^{n+1} \end{array}$$

$\therefore S=\boxed{2^{n+1}-1}$

（6） $\log_{10}\dfrac{\sqrt{6}}{4} = \log_{10} 6^{\frac{1}{2}} - \log_{10} 2^2 = \dfrac{1}{2}\log_{10}(2\times 3) - 2\log_{10} 2 = \dfrac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) - 2\log_{10} 2$

$= \dfrac{1}{2}\log_{10} 3 - \dfrac{3}{2}\log_{10} 2 = \boxed{\dfrac{b-3a}{2}}$

2

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （t は実数）とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ （O は原点）より、

$\mathrm{H}(1+t, 1+2t, 1+3t)$ と表せて、このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CH}}$ より、

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-6+t\\-6+2t\\-8+3t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-6+t)+2(-6+2t)+3(-8+3t)=0 \Leftrightarrow 14t=42 \Leftrightarrow t=3$ とわかるので、

$\boxed{\mathrm{H}(4,7,10)}$

3

（1） $f'(x)=3x^2-1$ より、l は傾き $f'(1)=2$ で点 $(1,0)$ を通る直線なので、その式は、$\boxed{y=2(x-1)}$

（2） $f(x)-2(x-1)=x(x+1)(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$ より、C と l の上下関係は、

x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f(x)-2(x-1)$	$-$	0	$+$	0	$+$
C と l の上下	l が上	共有点	C が上	共有点	C が上

の通り。よって、C と l は $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲で領域を囲み、この範囲では C が l より上にあるので、

$$S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-2(x-1)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\boxed{\frac{27}{4}}$$

数学Sコースクラス分け試験　サンプル問題

1

次の問について、答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。(4点×5＝20点)

（１）放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+k$ が接するように実数の値を定め、そのときの接点Pの座標を求めよ。

（２）多項式 $f(x)=(x-3)^{2007}$ を、多項式 $g(x)=x-2$ で割った余りを求めよ。

（３）円 $C:x^2+y^2+4x-6y+9=0$ の中心Aの座標と半径 r を求めよ。

（４） $0°\leqq\theta<360°$ として、 $\sin\theta\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす θ の範囲を求めよ。

（５） $a=\log_2 3$， $b=\log_2 5$ とするとき、 $\log_2\sqrt{\frac{15}{2}}$ を a,b を用いて表せ。

2

次の問について、答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。(5点×5＝25点)

（１）○○○△△×の並べ方は全部で何通りあるか？　ただし、○どうし、△どうしは区別しないものとする。

（２） $(x+2y)^{10}$ の展開式における x^8y^2 の係数を求めよ。

（３）1個のサイコロを3回振るとき、出た目の和が15以下になる確率 p を求めよ。

（４）バスケット部のマイケル君は、確率 $\frac{1}{3}$ でフリースローが決まるという。マイケル君が6回フリースローを放つとき、ちょうど2回だけ決まる確率 q を求めよ。

（５）赤球1個と白球2個の入った箱Aと、赤球2個と白球3個の入った箱Bとがある。この2箱のうちのどちらかを無作為に選び、選んだ箱の中から1球を取り出すとき、取り出した球が赤球である確率 r を求めよ。

$\boxed{3}$

以下の設問に答えよ。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さずに書くこと。(25 点)

1 日で 2 倍になるバクテリア A と、2 日で 3 倍になるバクテリア B がある。ただし、どちらのバクテリアも、一定の割合で（指数関数的に）増えつづけるものとする。$\log_{10} 2 = 0.30$，$\log_{10} 3 = 0.48$ として、以下の問に答えよ。

（近似が大ざっぱなため、多少の誤差が生じるが、気にしなくてよい）

（1）次の$\boxed{ア}$～$\boxed{オ}$にあてはまる数を答えよ。(結果のみでよい)

バクテリア A は、2 日で$\boxed{ア}$倍、3 日で$\boxed{イ}$倍になり、

バクテリア B は、4 日で$\boxed{ウ}$倍、6 日で$\boxed{エ}$倍、3 日で$\boxed{オ}$倍になる。

（2）バクテリア A,B はそれぞれ x 日で何倍になるか？　x を用いて、$○^{△}$（○の△乗）の形で表せ。(結果のみでよい)

（3）バクテリア A の量が初めの量の 1 兆倍（10^{12} 倍）になるのは何日後か？

（4）バクテリア A,B の初めの量が等しいとき、バクテリア A の量がバクテリア B の量の 1 兆倍（10^{12} 倍）になるのは何日後か？

$\boxed{4}$

以下の設問に答えよ。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さずに書くこと。ただし、「結果のみ答えよ」とある場合だけは、結果以外は書かないこと。(30 点)

初項 $a_1 = 1$ の数列 $\{a_n\}_{n\geqq 1}$ に対して、$b_n = a_{n+1} - a_n$（$n \geqq 1$）で定まる数列 $\{b_n\}_{n\geqq 1}$ を考える。$b_1 = 2$，$b_2 = 6$ であるとして、以下の問に答えよ。

<u>（1），（2），（3）は結果のみでよい。</u>

（1）a_2 と a_3 を求めよ。

（2）$\{b_n\}_{n\geqq 1}$ が等差数列であるとき、b_n を n の式で表せ。

（3）$\{b_n\}_{n\geqq 1}$ が等比数列であるとき、b_n を n の式で表せ。

<u>以下では説明、計算過程を明記せよ。</u>

（4）$\{b_n\}_{n\geqq 1}$ が等差数列であるとき、a_n を n の式で表せ。

（5）$\{b_n\}_{n\geqq 1}$ が等比数列であるとき、a_n を n の式で表せ。

（6）$\{b_n\}_{n\geqq 1}$ が $b_n = n(n+1)$（$n \geqq 1$）であるとき、a_n を n の式で表せ。

$\boxed{5}$

次の5題中、**2題を選択**して答えよ。

解答欄には、結果のみでなく、計算過程や説明も記すこと。

（1） $0° \leqq \theta < 360°$ とするとき、不等式 $4\cos^2\theta - 1 \leqq 0$ を解け。（8点）

（2） 12^{100} の桁数 N と最高位（首位）の数字 A を求めよ。ただし、$\log_{10} 2 = 0.30103$, $\log_{10} 3 = 0.47712$ として計算すること。（12点）

（3） 実数 x, y が、条件：「$x^2 + y^2 = 1$ かつ $y \geqq 0$」…① をみたして動くとき、$z = x + y$ のとる値の最大値 M 、最小値 m を求めよ。（12点）

（4） 当たりくじ4本を含む計10本のくじがある。このくじを10人の人が1人1本ずつ順に引いていくとき、どこかで2人以上連続して当たる確率 p を求めよ。ただし、引いたくじは元に戻さないとする。（14点）

（5） 実数 a, b についての条件：「$ax = b$ をみたす1以上の実数 x が存在する」…② の真理集合、すなわち、②が成立するような点 (a, b) の全体を、ab 平面に図示せよ。（境界を含むかどうかについても明記すること）（16点）

【解答】

1

（1）2式を連立して得られる2次方程式：$x^2-2x=x+k \Leftrightarrow x^2-3x-k=0 \cdots①$ が重解を持つときだから、

判別式 $D=9+4k=0$ より、$\boxed{k=-\dfrac{9}{4}}$

また、このときの①の解は、$x=\dfrac{3}{2}$ なので、$\boxed{\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{4}\right)}$

（2）$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $Q(x)$、余りを r（定数）とすると、$f(x)=(x-3)^{2007}=(x-2)Q(x)+r$

$\therefore f(2)=(-1)^{2007}=r$　これより、求める余り：$\boxed{r=-1}$とわかる。

（3）$(x+2)^2+(y-3)^2=4$ と変形できるので、$\boxed{\mathrm{A}(-2,3),\ r=2}$

（4）円 $x^2+y^2=1$ 上の点のうち、$y \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす部分に対応する θ を求めて、$\boxed{225° \leqq \theta \leqq 315°}$

（5）$\log_2\sqrt{\dfrac{15}{2}}=\log_2\left(\dfrac{15}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{15}{2}=\dfrac{1}{2}(\log_2 15-\log_2 2)=\dfrac{1}{2}(\log_2 3+\log_2 5-1)=\boxed{\dfrac{a+b-1}{2}}$

2

（1）$\dfrac{6!}{3!\times 2!}=\boxed{60\text{通り}}$

あるいは、6部屋に、×を1個、続けて△を2個入れると考えて、${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=6\times 10=60$ 通り

（2）$(x+2y)^{10}$ の展開式における x^8y^2 の項は、${}_{10}\mathrm{C}_2x^8(2y)^2=45\times 4x^8y^2=180x^8y^2$ なので、求める係数は$\boxed{180}$

（3）余事象：「出た目の和が16以上」の確率 p' を求めよう。

すべての目の出方 6^3 通り（各々等確率）のうち、出た目の和が16以上になるのは、

$(6,6,4)$，$(6,4,6)$，$(4,6,6)$，$(6,5,5)$，$(5,6,5)$，$(5,5,6)$　←出た目の和が16

$(6,6,5)$，$(6,5,6)$，$(5,6,6)$　←出た目の和が17

$(6,6,6)$　←出た目の和が18

の10通りなので、$p'=\dfrac{10}{6^3}=\dfrac{5}{108}$　$\therefore p=1-p'=\boxed{\dfrac{103}{108}}$

（4）$q={}_6\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=15\times\dfrac{2^4}{3^6}=\boxed{\dfrac{80}{243}}$

（5）どちらの箱を選ぶかは確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつであり、箱Aを選んだとき、取り出した1球が赤球である確率は $\dfrac{1}{3}$、

箱Bを選んだとき、取り出した1球が赤球である確率は $\dfrac{2}{5}$ なので、$r=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\boxed{\dfrac{11}{30}}$

$\boxed{3}$

（2）バクテリア A は、1 日で 2 倍になるから、x 日で $\boxed{2^x}$ 倍になり、バクテリア B は、2 日で 3 倍になるから、

x 日（2 日の $\dfrac{x}{2}$ 倍の時間）で $\boxed{3^{\frac{x}{2}}}\left(=\sqrt{3}^x\right)$ 倍になる。

（1）（2）より、$\boxed{ア}=2^2=4$，$\boxed{イ}=2^3=8$，$\boxed{ウ}=3^{\frac{4}{2}}=9$，$\boxed{エ}=3^{\frac{6}{2}}=27$，$\boxed{オ}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

（3）x 日後に 10^{12} 倍になるとすると、

$$
\begin{aligned}
2^x=10^{12} &\Leftrightarrow \log_{10}\left(2^x\right)=\log_{10}\left(10^{12}\right)\\
&\Leftrightarrow x\log_{10}2=12\\
&\Leftrightarrow x=\frac{12}{\log_{10}2}
\end{aligned}
$$

$\therefore x\approx\dfrac{12}{0.30}=\boxed{40}$（日後）

（より正確な値は、39.863⋯（日後）です）

（4）バクテリア A,B の初めの量を 1 とし、x 日後に A の量が B の量の 10^{12} 倍になるとすると、

$$
\begin{aligned}
2^x=3^{\frac{x}{2}}\times10^{12} &\Leftrightarrow \log_{10}\left(2^x\right)=\log_{10}\left(3^{\frac{x}{2}}\times10^{12}\right)\\
&\Leftrightarrow x\log_{10}2=\log_{10}\left(3^{\frac{x}{2}}\right)+\log_{10}\left(10^{12}\right)\\
&\Leftrightarrow x\log_{10}2=\frac{x}{2}\log_{10}3+12\\
&\Leftrightarrow 2x\log_{10}2=x\log_{10}3+24\\
&\Leftrightarrow \left(2\log_{10}2-\log_{10}3\right)x=24\\
&\Leftrightarrow x=\frac{24}{2\log_{10}2-\log_{10}3}
\end{aligned}
$$

$\therefore x\approx\dfrac{24}{2\times0.30-0.48}=\dfrac{24}{0.12}=\boxed{200}$（日後）

（より正確な値は、192.094⋯（日後）です）

$\boxed{4}$

（1）$a_1=1$ と $b_1=a_2-a_1=2$ より、$a_2=\boxed{3}$

$a_2=3$ と $b_2=a_3-a_2=6$ より、$a_3=\boxed{9}$

（2）$\{b_n\}_{n\geqq1}$ が等差数列であるとき、初項は $b_1=2$、公差は $b_2-b_1=6-2=4$ なので、

$b_n=2+4(n-1)=\boxed{4n-2}$（$n\geqq1$）

（3）$\{b_n\}_{n\geqq1}$ が等比数列であるとき、初項は $b_1=2$、公比は $\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{6}{2}=3$ なので、$b_n=\boxed{2\cdot3^{n-1}}$（$n\geqq1$）

ここで、$n \geqq 2$ に対し、

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と表せることを利用して、（4），（5），（6）を解く。

（4）$\{b_n\}_{n \geqq 1}$ が等差数列であるとき、（2）より、$b_1 = 2$，$b_{n-1} = 4(n-1) - 2 = 4n - 6$ （$n \geqq 2$）なので、

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2} = \frac{(4n-4)(n-1)}{2} = 2(n-1)^2 \quad (n \geqq 2)$$

よって、$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + 2(n-1)^2$ （$n \geqq 2$）であり、この等式は、$a_1 = 1 = 1 + 2(1-1)^2$ より、

$n = 1$ のときも成立している。

$\therefore a_n = 1 + 2(n-1)^2 = \boxed{2n^2 - 4n + 3}$ （$n \geqq 1$）

（5）$\{b_n\}_{n \geqq 1}$ が等比数列であるとき、（3）より、公比は3で、$b_1 = 2$，$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ なので、

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{b_1 - b_n}{1 - 3} = \frac{2 - 2 \cdot 3^{n-1}}{-2} = 3^{n-1} - 1 \quad (n \geqq 2)$$

よって、$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + (3^{n-1} - 1) = 3^{n-1}$ （$n \geqq 2$）であり、この等式は、$a_1 = 1 = 3^{1-1}$ より、

$n = 1$ のときも成立している。

$\therefore a_n = \boxed{3^{n-1}}$ （$n \geqq 1$）

（6）$b_n = n(n+1)$ （$n \geqq 1$）であるとき、

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} + \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)n\{(2n-1)+3\} = \frac{1}{6}(n-1)n(2n+2) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) = \frac{n^3 - n}{3} \quad (n \geqq 2)$$

よって、$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{n^3 - n}{3}$ （$n \geqq 2$）であり、この等式は、$a_1 = 1 = 1 + \frac{1^3 - 1}{3}$ より、

$n = 1$ のときも成立している。

$$\therefore a_n = 1 + \frac{n^3 - n}{3} = \boxed{\frac{n^3 - n + 3}{3}} \quad (n \geqq 1)$$

5

（1） $4\cos^2\theta-1\leqq 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta-\dfrac{1}{4}\leqq 0 \Leftrightarrow \left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)\leqq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ なので、

単位円：$x^2+y^2=1$ 上の点で、$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ をみたす部分に対応する θ の範囲を求めて、

$\boxed{60^\circ\leqq\theta\leqq120^\circ \text{ または } 240^\circ\leqq\theta\leqq300^\circ}$

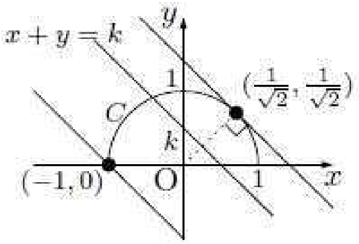
（2） $\log_{10}(12^{100})=100\times\log_{10}12=100\times\log_{10}(2^2\times3)=100\times(2\log_{10}2+\log_{10}3)=100\times(2\times0.30103+0.47712)$

$=100\times1.07918=107.918$ より、$12^{100}=10^{107.918}=10^{0.918}\times10^{107}$

ここで、$\begin{cases}\log_{10}8=\log_{10}(2^3)=3\log_{10}2=3\times0.30103=0.90309\\ \log_{10}9=\log_{10}(3^2)=2\log_{10}3=2\times0.47712=0.95424\end{cases}$ より、

$8=10^{0.90309}<10^{0.918}<10^{0.95424}=9$ なので、$\boxed{\text{桁数 } N=108,\ \text{最高位の数字 } A=8}$

（3）①をみたす点 (x,y) の集合は、図のような半円 C（両端も含む）



なので、直線 $x+y=k$ が半円 C と共有点を持つような最大の k と

最小の k を求めればよい。直線 $x+y=k$ は、

つねに傾きが -1 で、k が増加するにつれて上方へ移動するので、

C と共有点を持つ最小の k は、点 $(-1,0)$ を通るときで、$k=-1$

C と共有点を持つ最大の k は、C と点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ において接するときで、$k=\sqrt{2}$

以上により、$\boxed{M=\sqrt{2},\quad m=-1}$

【（3）の別解】

①の表す半円 C 上の点 (x,y) は、$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$（$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$）と表されるので、

θ が $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲を動くとき、$z=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ の最大値、最小値を求めればよい。

$\theta+45^\circ$ が、$45^\circ\leqq\theta+45^\circ\leqq225^\circ$ の範囲を動くことに注意すれば、

$\sin(\theta+45^\circ)$ の最大値は 1、最小値は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とわかるので、

$M=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$，$m=\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$

（4）2人以上、連続して当たらない確率 q をまず求めよう。当たりを○、はずれを×で表せば、起こりうるすべての場合は、○○○○××××××の順列（${}_{10}C_4$ 通り）で表すことができ、その各々は等確率で起こる。

この ${}_{10}C_4$ 通りの順列のうち、○が連続して並ばないものは、$V_1\times V_2\times V_3\times V_4\times V_5\times V_6\times V_7$ の7箇所（V_1~V_7）のうち4箇所を選んで○を1つずつ入れると考えて、${}_7C_4$ 通りなので、$q=\dfrac{{}_7C_4}{{}_{10}C_4}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore p=1-q=\boxed{\dfrac{5}{6}}$

（5）(i)　$a=0$ のとき

$0x=b$ をみたす x は、$b=0$ なら全実数、$b\neq 0$ だと存在しないので、

②が真となるような b は、$b=0$ のみである。

(ii)　$a\neq 0$ のとき

$ax=b$ をみたす x は、$x=\dfrac{b}{a}$ ただ 1 つなので、

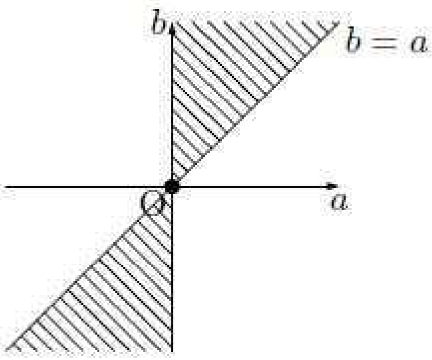
②が真となるための必要十分条件は、$\dfrac{b}{a}\geqq 1$ である。

以上により、②が真となるための a,b の条件は、

（$a=0$ かつ $b=0$）または（$a>0$ かつ $b\geqq a$）または（$a<0$ かつ $b\leqq a$）

であり、これをみたす点 (a,b) の全体を ab 平面に図示すると図のようになる。

ただし、境界については、直線 $b=a$ 上の点はすべて含み、b 軸上の $(0,0)$ 以外の部分は含まない。



数学 EFG／M コースクラス分け試験　サンプル問題

$\boxed{1}$

次の問について、答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。(5 点×6＝30 点)

（１） $2\sin x + 1 < 0$，$0° \leqq x < 360°$ をみたす x の範囲を求めよ。

（２） $y = \cos^2 x + \sin x$ について、x が全実数を動くときの y の値の範囲を求めよ。

（３） xy 平面の領域 $3x + 4y \leqq 5$ が点 $(a, 1-a)$ を含まないときの、実数 a の範囲を求めよ。

（４） 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $3x + 4y = k$ が接するときの実数 k の値をすべて求めよ。

（５） $S = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 4^k$ を n の式で表せ。

（６） $a_1 = 0$，$a_{n+1} = 2a_n - 3$（$n \geqq 1$）で定まる数列 $\{a_n\}$ について、a_n を n の式で表せ。

$\boxed{2}$

次の問について、答の数値または式のみを解答欄に記入せよ。(5 点×6＝30 点)

（１） $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,1,1)$，$\mathrm{B}(1,0,1)$ とするとき、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ の値を求めよ。

（２） $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,2,3)$，$\mathrm{B}(3,2,1)$ とするとき、$\cos\angle\mathrm{AOB}$ の値と、$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S をそれぞれ求めよ。

（３） $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,2,3)$，$\mathrm{B}(3,0,2)$ とするとき、O から直線 AB におろした垂線の足 H の座標を求めよ。

（４） $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3$ について、極値をとる x の値をすべて求めよ。

（５） $I = \int_0^3 (x^2 - x)dx$ を求めよ。

（６） 曲線 $y = x^2 - x$ と直線 $x = 3$ および x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

3

以下の設問に答えよ。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さずに書くこと。(30 点)

四面体OABC において、AB の中点をD 、OC を1:2 に内分する点をE とし、DE の中点をP とする。また直線AP と平面OBC の交点をQ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき、

$$|\vec{a}|=\sqrt{2},\quad |\vec{b}|=2,\quad |\vec{c}|=\sqrt{6},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3$$

が成り立つという。このとき、次の問に答えよ。

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OD}},\overrightarrow{\mathrm{OE}},\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。(答のみでよい)

（2） $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ （s は実数）として、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $s,\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

（3）（2）の s の値を求めよ。

（4） OQ の長さを求めよ。

（5） 直線AP と平面OBG が直交するという。このとき、内積値 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ をそれぞれ求めよ。

4

以下の設問に答えよ。推論過程を明解かつ簡潔な日本語で述べ、計算過程も主要なものは略さずに書くこと。(30 点)

$f(x)=x^3-6x$, $g(x)=2x^2-6x$ とする。

（1） $f(x)$ の増減を調べ、$y=f(x)$ のグラフを描け。x 切片、極値もグラフに記入せよ。

（2） $f(x)>g(x)$ となる x の範囲を調べよ。

（3） 2 曲線 $y=f(x), y=g(x)$ で囲まれた図形を D とする。（2）に注意して、D を図示せよ。2 曲線の共有点の座標をグラフの中に記入せよ。

（4） D の面積 S を求めよ。

（5）（3）の図形 D を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

5

次の 5 問中、（1）は必ず答えよ。また、（1）以外に（2）～（5）から 1 題を選択して答えよ。簡潔な説明と結果を記入せよ（選択した問題番号も記入すること）。

必修問題

（1） a を実数の定数とする。次をみたす x の範囲をそれぞれ求めよ。答のみでよい。a の範囲で場合分けして考えること。（10 点）

(i) $ax > 1$

(ii) $x(x-1)(x-a) < 0$（$a > 0$ とする）

選択問題

以下から 1 題選択して答えよ。もし 2 題以上解答しても、問題番号の若い 1 題のみを採点する。

（2） 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2$ の、$x = 1$ での接線を l とする。このとき、C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。（8 点）

（3） 座標空間内で、点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径 3 の球を S_1、点 $\mathrm{A}(4,0,0)$ を中心とする半径 5 の球を S_2 とする。このとき S_1 と S_2 の共通部分の体積 V を求めよ。

（12 点）

（4） 座標空間内の 3 点を $\mathrm{O}(0,0,0)$， $\mathrm{A}(2,3,6)$， $\mathrm{C}(6,2,-3)$ とする。

(i) $\triangle\mathrm{OAC}$ は直角二等辺三角形であることを示せ。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の両方に垂直で、長さが OA に等しいベクトルを 1 つ求めよ。

(iii) O,A,C を頂点にもつ正八面体について、残りの 3 つの頂点の座標をすべて求めよ。

（15 点）

（5） $\begin{cases} a_1 = 2 \\ \left(\dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2}\right) a_{n+1} = a_n \quad (n \geqq 1) \end{cases}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。

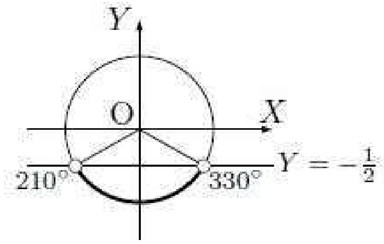
(i) a_n の一般項を予想せよ。

(ii) (i)の予想が正しいことを証明せよ。

（15 点）

【解答】

$\boxed{1}$



（1） $(X,Y)=(\cos x,\sin x)$ とおき、単位円 $X^2+Y^2=1$ 上で

$2Y+1<0$ となる範囲を調べると、図の太線部。

次に対応する角 x の範囲を $0°\leqq x<360°$ の範囲で考えて、

$\boxed{210°<x<330°}$ を得る。

（2） $y=\cos^2 x+\sin x$

$t=\sin x$ とおくと、 x が全実数を動くとき、

$-1\leqq t\leqq 1$ …①

であり、

$y=(1-t^2)+t=-t^2+t+1=f(t)$ の値域を①の範囲で調べると、 $f(t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

$y=f(t)$ のグラフは上に凸な放物線であり、①の範囲では y の最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 、最小値は $f(-1)$ である。

$f(-1)\leqq y\leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ より、 $\boxed{-1\leqq y\leqq \dfrac{5}{4}}$ である。

（3） $(a,1-a)$ は $3x+4y>5$ をみたすことになる。 $3a+4(1-a)>5$ より、 $\boxed{a<-1}$

（4） $C:x^2+y^2=1$ と $l:3x+4y=k$ が接する条件は、

(C の中心 O と l の距離) ＝ (C の半径) …①

が成り立つこと。

$\therefore \dfrac{|0+0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ より、 $|k|=5$　 $\boxed{k=\pm 5}$

（5） これは公比 4 の等比数列の和。

$$S=3+3\cdot 4^1+3\cdot 4^2+\cdots+3\cdot 4^n$$
$$4S=\quad 3\cdot 4^1+3\cdot 4^2+\cdots+3\cdot 4^n+3\cdot 4^{n+1}$$

の辺々を引くことで、 $-3S=3-3\cdot 4^{n+1}$ を得る。よって、 $\boxed{S=4^{n+1}-1}$

（6） $a_1=0$ …①、 $a_{n+1}=2a_n-3$ （ $n\geqq 1$ ）…②

②を変形して

$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ …③（ α は定数）にする。

そのためには $\alpha-2\alpha=-3$ より、 $\alpha=3$ とすればよい。

このとき、③より

$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot 2^{n-1}$

となる。

よって、①, $\alpha=3$ より、 $\boxed{a_n=3-3\cdot 2^{n-1}}$

$\boxed{2}$

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$　よって、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\boxed{3}$

（2）$\angle\mathrm{AOB}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角だから、cos の値はベクトルの内積を用いて計算できる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$ より

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$3+4+3=\sqrt{14}\sqrt{14}\cos\angle\mathrm{AOB}$　よって、$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{10}{14}=\dfrac{5}{7}$

また三角形 OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{14}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{14}\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}=7\sqrt{1-\frac{25}{49}}=2\sqrt{6}$$

$\boxed{\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{7},\quad S=2\sqrt{6}}$

■ S は面積公式 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$ から計算することもできます。

（3）直線 AB 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdots①$$

と表すことができる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ も①と表せる。

また $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より、$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=0\cdots②$

$\therefore (2-4-3)+t(4+4+1)=0$ ．$t=\dfrac{5}{9}$

よって①に戻して、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\dfrac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\8\\22\end{pmatrix}$　$\boxed{\mathrm{H}\left(\dfrac{19}{9},\dfrac{8}{9},\dfrac{22}{9}\right)}$

（4）$f'(x)=10x^4-20x^3-30x^2=10x^2(x^2-2x-3)=10x^2(x-3)(x+1)$

よって増減表は次のとおり。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

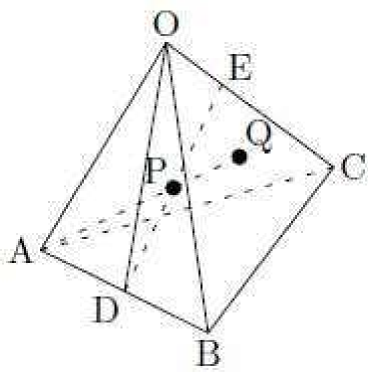
すると極値をとる x は、$\boxed{x=-1,3}$ とわかる。$x=0$ は NG。

（5）$\int_0^3 (x^2-x)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9-\frac{9}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$

（6）$y=x^2-x$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y \leqq 0$，$1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $y \geqq 0$ なので、

$$S = \int_0^1 -(x^2-x)dx + \int_1^3 (x^2-x)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}+\frac{9}{2}+\frac{1}{6} = \boxed{\frac{29}{6}}$$

$\boxed{3}$　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{6}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3 \cdots ①$



（1）内分点の式より、$\overrightarrow{OD} = \boxed{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$，　$\overrightarrow{OE} = \boxed{\frac{1}{3}\vec{c}}$，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \boxed{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}$$

（2）$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AP} = s(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}) = s\left(-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right) \cdots ②$

よって、②より $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ} = \boxed{\left(1-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}+\frac{s}{6}\vec{c}} \cdots ③$

（3）Q は平面 OBC 上の点より、$\overrightarrow{OQ} = t\vec{b}+u\vec{c} \cdots ④$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は四面体を張り、1 次独立なので、$\overrightarrow{OQ}$ の表し方は 1 通り。よって③④より

$1-\frac{3s}{4}=0$，　$\frac{s}{4}=t$，　$\frac{s}{6}=u$　　$\therefore \boxed{s=\frac{4}{3}}$，　$t=\frac{1}{3}$，　$u=\frac{2}{9} \cdots ⑤$

（4）③④と⑤より $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$　　よって OQ^2 は $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OQ}$ より

$$OQ^2 = \frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{9}\cdot\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{9} = \frac{1}{81}\left(9\vec{b}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{c}\right) = \frac{1}{81}\left(9\cdot4+12\cdot3+4\cdot6\right) = \frac{12}{81}(3+3+2) = \frac{96}{81}$$

よって $\boxed{OQ=\frac{4\sqrt{6}}{9}}$

（5）$\overrightarrow{AP} \perp \triangle OBC$ より $\begin{cases} \overrightarrow{AP}\cdot\vec{b}=0 \\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$

よって、$\begin{cases} \left(-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0 \\ \left(-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$　より、$\begin{cases} -\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdot\vec{b}=0 \\ -\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$

よって①より、$-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+1+\frac{1}{2}=0$　　$\therefore \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=2}$　　$-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{3}{4}+1=0$　　$\therefore \boxed{\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{7}{3}}$

■これと①より

$\mathrm{AB}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=2-4+4=2$　　$\mathrm{AC}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}=2-\frac{14}{3}+6=\frac{10}{3}$

$\mathrm{BC}^2=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}=4-6+6=4$

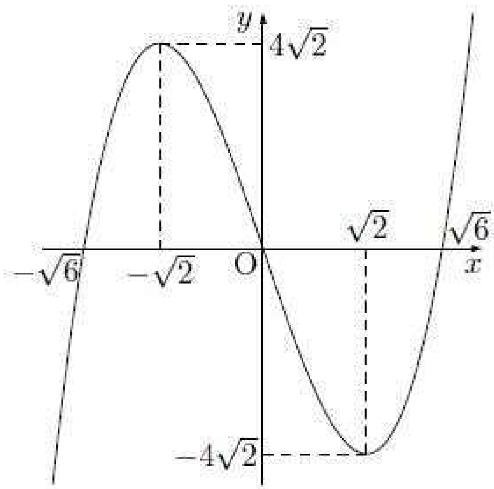
よって AB=$\sqrt{2}$，AC=$\frac{\sqrt{30}}{3}$，BC=2 で、AB+AC＞BC，AC+BC＞AB，BC+AB＞AC が成り立つので、3 点 A,B,C は確かに三角形を成し、条件をみたす四面体 OABC が存在することがわかります。

$\boxed{4}$

（1） $f'(x)=3x^2-6=3(x^2-2)$ より

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

よって $y=f(x)$ のグラフは下のよう。



（2） $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^3-6x-(2x^2-6x)>0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2>0$

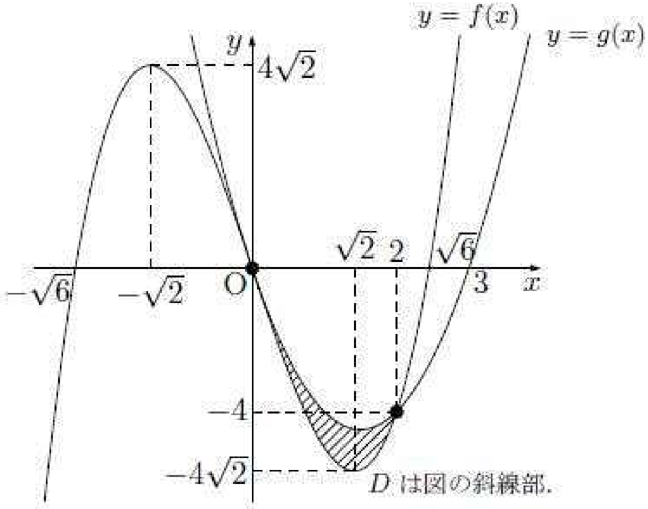
$\Leftrightarrow x^2(x-2)>0$

$\Leftrightarrow \boxed{x>2}$

（3）（2）より $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の上下関係は、$x>2$ で $f(x)>g(x)$ 、

$x<0$ ， $0<x<2$ で $f(x)<g(x)$ 、 $x=0,2$ で $f(x)=g(x)$ となる。

これらに注意して囲む部分 D のグラフを描くと下のよう。



（4） $S=\int_0^2 (g(x)-f(x))dx=\int_0^2 (2x^2-x^3)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{16}{3}-4=\boxed{\frac{4}{3}}$

（5） D を x 軸のまわりに回転させた立体を $x=k$ で切った切り口の図形は、

半径 $-f(k)$ の円板から半径 $-g(k)$ の円板を除いた円環となる。

よって切り口の面積は $\pi(f(k))^2-\pi(g(k))^2$ で、立体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V&=\int_0^2 (\pi(f(k))^2-\pi(g(k))^2)dk\\
&=\pi\int_0^2 ((k^3-6k)^2-(2k^2-6k)^2)dk\\
&=\pi\int_0^2 (k^6-12k^4+36k^2-4k^4+24k^3-36k^2)dk\\
&=\pi\int_0^2 (k^6-16k^4+24k^3)dk\\
&=\pi\left[\frac{k^7}{7}-\frac{16}{5}k^5+6k^4\right]_0^2\\
&=\pi\left(\frac{2^7}{7}-\frac{16}{5}\cdot 2^5+6\cdot 2^4\right)\\
&=2^5\pi\left(\frac{4}{7}-\frac{16}{5}+3\right)\\
&=32\pi\cdot\frac{20-112+105}{35}\\
&=\boxed{\frac{416}{35}\pi}
\end{aligned}
$$

5

（1）（i）　$ax>1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a>0\text{のとき、}x>\dfrac{1}{a} \\ a=0\text{のとき、}0\cdot x>1 \quad \therefore \text{解なし} \\ a<0\text{のとき、}x<\dfrac{1}{a} \end{cases}}$

（ii）　$x(x-1)(x-a)<0$ （$a>0$）…①　$y=x(x-1)(x-a)$ の符号は、

（ア）$0<a<1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

（イ）$a=1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y	$-$	0	$+$	0	$+$

（ウ）$a>1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって、①$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 0<a<1\text{のとき、}x<0,\ a<x<1 \\ a=1\text{のとき、}\quad x<0 \\ a>1\text{のとき、}\quad x<0,\ 1<x<a \end{cases}}$

（2）　$y'=3x^2-4x$ より、$x=1$ では $y'=-1$。よって接線 l の式は $l: y=-(x-1)-1=-x$

次に C と l の上下を調べる。$h(x)=(x^3-2x^2)-(-x)=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$

よって $h(x)$ の符号は

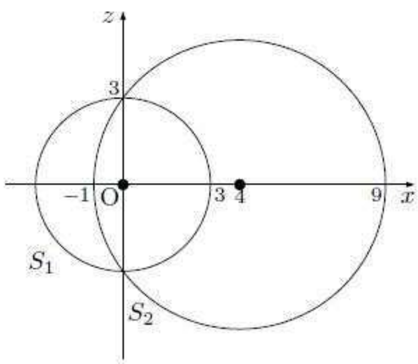
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

となる。よって $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で囲み、面積 S は

$$S=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

（3）図より S_1, S_2 の共通部分は、S_2 の $-1 \leqq x \leqq 0$ の部分（K_1 とする）と、S_1 の $0 \leqq x \leqq 3$ の部分（K_2 とする）の和集合であることがわかる。K_1 の体積について、

$x=k$ での切り口の図形は半径 $\sqrt{5^2-(4-k)^2}$ の円板であり、



切り口の面積は $\pi\left\{\sqrt{5^2-(4-k)^2}\right\}^2=\pi(9+8k-k^2)$

よって K_1 の体積 V_1 は、

$$V_1=\int_{-1}^{0}\pi(9+8k-k^2)dk=\pi\left[9k+4k^2-\frac{k^3}{3}\right]_{-1}^{0}=-\pi\left(-9+4+\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}\pi$$

K_2 の体積について、これは半径 3 の球の半分なので、

体積 V_2 は $V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3\cdot\frac{1}{2}=18\pi$ で求められる（もちろん積分で求めてもよい）。

よって、$V=V_1+V_2=\frac{14+54}{3}\pi=\boxed{\frac{68}{3}\pi}$

（4）（i）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$ について、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=12+6-18=0$ より、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …①

$\mathrm{OA}=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$　　$\mathrm{OC}=\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{49}=7$ より $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$ …②

以上①②より、△OAC は直角二等辺三角形である。

（ii）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とおく。

$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ より、$2a+3b+6c=0$ …③

$\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ より、$6a+2b-3c=0$ …④

③ +2×④より、$14a+7b=0$　　$\therefore b=-2a$

3×③－④より、$7b+21c=0$　　$\therefore b=-3c$

$$\therefore\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}b\\b\\-\frac{1}{3}b\end{pmatrix}//\boxed{\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}}$$

このベクトルの長さは 7 なので、これが求めるベクトルの 1 つである。

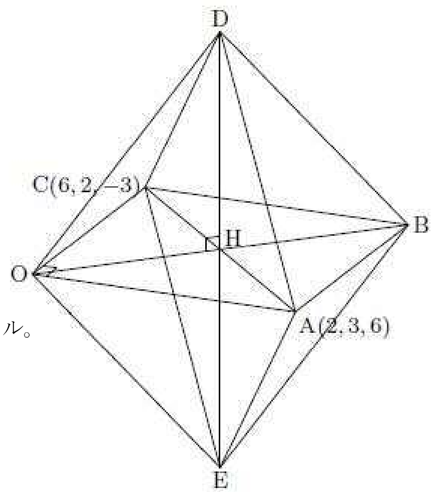
■もう 1 本あって、$\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}$ を答えても良い。

(iii)　残りの頂点を図のように B,D,E とおく。

まず B は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix}$

また OB の中点を H とすると、

$\overrightarrow{\mathrm{HD}},\overrightarrow{\mathrm{HE}}$ は平面 OAC に垂直で、長さ $\mathrm{OH}=\frac{7}{\sqrt{2}}$ のベクトル。



よって(ii)の結果を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}},\overrightarrow{\mathrm{HE}}=\pm\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}\times\frac{7}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}},\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$$

以上より、のこりの頂点の座標は $\boxed{(8,5,3)\,,\ \left(4\pm\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2}\mp 3\sqrt{2},\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}\right)}$ （複号同順）

（５）（ｉ） $\begin{cases} a_1=2 & \cdots① \\ \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2}\right)a_{n+1}=a_n \quad (n\geqq 1) & \cdots② \end{cases}$

より②で $n=1,2,3,4$ として

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)a_2=a_1 \qquad \therefore a_2=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)a_3=a_2 \qquad \therefore a_3=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$$

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)a_4=a_3 \qquad \therefore a_4=\frac{8}{5}\cdot\frac{10}{7}=\frac{16}{7}$$

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)a_5=a_4 \qquad \therefore a_5=\frac{16}{7}\cdot\frac{14}{9}=\frac{32}{9}$$

を得る。ここから $a_n=\frac{2^n}{2n-1}\cdots P(n)$ と予想できる。

（ii） $P(n)$ が $n=1,2,3,\cdots$ で正しいことを示そう。

（Ⅰ） $n=1$ のとき、 $P(1)$ が正しいことを示す。

$P(1)$ の左辺 $=a_1=2$ （①より）

$P(1)$ の右辺 $=\frac{2}{1}=2$

よって成り立つ。

（Ⅱ） $n=k$ のとき、 $P(k)$ が正しいと仮定。このとき $P(k+1)$ も正しいことを示そう。

（ $P(k+1)$ の左辺） ＝ a_{k+1}

ここで a_{k+1} は②より $\frac{2+(2k-1)}{2(2k-1)}a_{k+1}=a_k$

$$\therefore a_{k+1}=a_k\cdot\frac{2(2k-1)}{2k+1}=\underbrace{\frac{2^k}{2k-1}\cdot\frac{2(2k-1)}{2k+1}}_{(\because P(k)\text{の仮定による})}=\frac{2^{k+1}}{2k+1}=(\,P(k+1)\text{ の右辺})$$

よって $P(k+1)$ も成立することが示された。

（Ⅲ） 以上(Ⅰ)(Ⅱ)を組み合わせると、数学的帰納法により、

$n=1,2,3,\cdots$ で $P(n)$ が成立することが示される。

英語多読クラス入会試験用 ACE 英語運用能力テスト　サンプル問題

新高 2 英語多読クラスでは、入会試験に ACE 試験（英語運用能力テスト）を行います。以下は、試験の一部のサンプル問題です。

1　【リスニング】

(1) 情報収集問題

これから、駅から郵便局までの道順に関する会話を聞きます。

（放送される英文）

M: Excuse me, could you tell me how to get to the post office?

F : Sure. After you go out of the station, go straight and turn left at the first corner. Then, walk down the street and turn right at the second corner.

M: OK. Then…

F : Keep on walking and you'll come to a bridge.

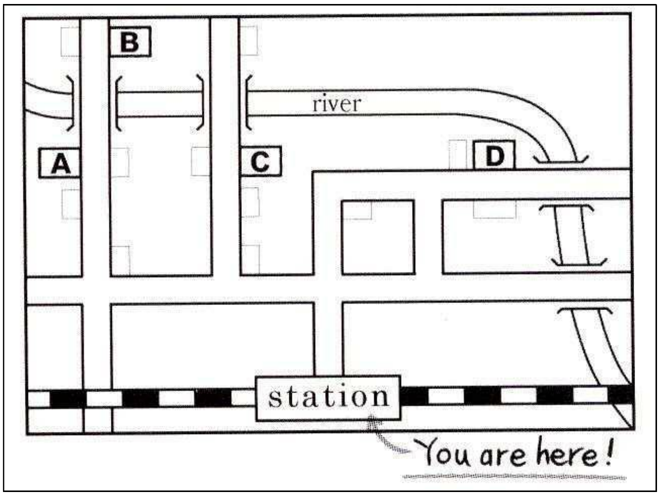
M: Do I cross it?

F : No, before the bridge, there's a flower shop on your right. The post office is just across from it. It's very easy to find.

M: I see. Thanks for your help.

Q　郵便局は、地図上のどの位置にあるでしょうか。

① A
② B
③ C
④ D



（２）総合リスニング問題

（放送される英文）

Attention please. The trains on the East Line have been stopped because of an accident at Johnson Station. East Line Super Express is also out of service.

Those who want to go to Johnson Station, please take the free shuttle bus from this station.

Those who want to go to Valley Station, please take the Central Line from this station and go to Parkway Station. Change trains there to the Midland Line. Valley Station is a twenty-minute ride from Parkway Station.

Thank you.

Q What is happening now?

① People must use East Line Super Express.
② People must get off at Johnson Station.
③ People can’t use the East Line.
④ People can’t go to Johnson Station.

Q To go to Valley Station, what should you do?

① Take the shuttle bus from this station.
② Take the East Line and change trains at Parkway Station.
③ Take the Midland Line, then change to the Parkway Line.
④ Take the Central Line, then change to the Midland Line.

2　【文法・語彙】

空所を含む 1 往復の会話文もしくは 1～2 文の短い英文を読み、空所に入る語（句）を選択肢から選びます。

（1）“What(　　　　) do they speak in Canada? ”
“They speak English and French.”

① countries
② languages
③ nations
④ persons

（2）“How did you (　　　　) last weekend? ”
“I went to see a movie with my friends.”

① care
② make
③ spend
④ use

3 【リーディング】

英文を読み、英文に付随する質問の答を選択肢から選びます。各英文には、1～3 問の質問が付随します。

Positions Wanted

I'm Jake Stevenson. I'm a student at Brentwood High School, and I am looking for a part-time job. I can work evenings after school, but not on Tuesday evenings. I'd like to work in or around the town of Brentwood.

I'm Maria Gomez. I'm a second-year student at Frontenac College. I am looking for a summer job from June through August. During that time I want to work full-time. I can use Word and Excel for Windows computers.

Help Wanted

A. A Chinese Restaurant in Brentwood needs a waiter to works at lunch time. Great salary and free meals. Monday through Saturday from 10 a.m. to 2 p.m.

B. Prazzi, a boutique in downtown Seattle needs part-time sales staff. A person who can use Excel is welcomed. Working Hours: 11:00 to 15:00. Closed on Tuesdays.

C. Johnson Co. needs a summer time office clerk who can work either part-time or full-time. A person with a high school guraduate level of education is wanted.

D. A fitness club in Brentwood needs a part-time office clerk. A person who can work more than three evenings a week is wanted.

（1）Which job is good for Jake Stevenson?

① A
② B
③ C
④ D

（2）Which job is good for Maria Gomez?

① A
② B
③ C
④ D